第一章 函数与极限

习 题 1-1

1.略

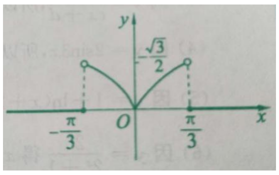
2.解：（1）不同. $f(x)$定义域为：$x \neq 0$，而$g(x)$定义域为$x > 0$.

（2）不同. 对应法则不同：$f(x)=x,\text{而}g(x)=|x|$.

（3）相同. $f(x)=\sqrt[3]{x^3(x-1)}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$.

（4）不同. $f(x)$ 定义域为 R，$g(x)$的定义域为$x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$.

3.解：函数$y=\varphi(x)$的图形如图所示；



$$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(-2)=0.$$

4. 证明：（1）$y=f(x)=\dfrac{x}{1-x}=-1+\dfrac{1}{1-x},x\in(-\infty,1)$.

$\because \dfrac{1}{1-x}\text{在}(-\infty,1)\text{上单调递增},\therefore y\text{在}(-\infty,1)\text{上也单调递增}.$

（2）$y=f(x)=x+\ln x,\because x\text{在}(0,+\infty)\text{单调递增},\ln x\text{在}(0,+\infty)\text{上单调递增}.$ 而

两单调递增函数的和函数也是单调递增的.$\therefore y$在$(0,+\infty)$上单调递增.

5.【思路探索】由奇偶性的定义，验证$f(x)\text{与}f(-x)$的关系.

6.略

7.解：（1）因$y=\sqrt[3]{x+1},\text{所以}x=y^3-1,\text{则反函数为}y=x^3-1;$

（2）因$y=\dfrac{1-x}{1+x},\text{所以}x=\dfrac{1-y}{1+y},\text{则反函数为}y=\dfrac{1-x}{1+x};$

（3）因$y=\dfrac{ax+b}{cx+d},\text{所以}x=\dfrac{b-dy}{cy-a},\text{则所求的反函数为}y=\dfrac{b-dx}{cx-a};$

（4）因 $y=2\sin 3x$,所以$x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,则$y=2\sin 3x$的反函数为$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$;

（5）因 $y=1+\ln(x+2)$,故$x=\frac{e^y}{e}-2$,故反函数为$y=e^{x-1}-2$;

（6）因 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$得$x=\log_2\frac{y}{1-y}$,故所求反函数为$y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

8.解（1）复合函数为：

$$y=f(x)=\sin^2 x, y_1=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}, y_2=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}.$$

（2）复合函数为：$y=f(x)=\sin 2x, y_1=f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$y_2=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

（3）复合函数为$y=f(x)=\sqrt{1+x^2}$,
$y_1=f(1)=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}, y_2=f(2)=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

（4）复合函数为：$y=f(x)=e^{x^2}, y_1=f(0)=e^0=1, y_2=f(1)=e^1=e$

（5）复合函数为：$y=(e^x)^2=e^{2x}, y_1=f(1)=e^2, y_2=f(-1)=e^{-2}$.

9.解：（1）$f(x^2)$的定义域由$0\le x^2\le 1$决定，所以$f(x^2)$得定义域为$\{x|-1\le x\le 1\}$.

（2）$f(\sin x)$的定义域由$0\le\sin x\le 1$决定故$f(\sin x)$的

定义域为$\{x|2k\pi\le x\le 2k\pi+\pi, k\in Z\}$.

（3）$f(x+a)$的定义域由$0\le x+a\le 1$决定，所以$f(x+a)$的定义域为$\{x|-a\le x\le 1-a\}$

（4）$f(x+a)+f(x-a)$的定义域由$\begin{cases}0\le x+a\le 1\\0\le x-a\le 1\end{cases}$决定，所以

1）当$a>\frac{1}{2}$时,上方程组无解，即$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为ϕ.

2）当$0<a\le\frac{1}{2}$时，解得$a\le x\le 1-a$，即定义域为$\{x|a\le x\le 1-a\}$.

习　题 1-2

1.解（1）收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.

（2）收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$.

（3）收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right) = 2$.

（4）收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right) = 1$.

（5）发散，n 为偶数则 $x_n \to +\infty (n\to\infty)$; n 为奇数则 $x_n \to -\infty (n\to\infty)$.

（6）收敛，$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

（7）发散，$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

（8）发散，n 为偶数则 $x_n \to 2(n\to\infty)$; n 为奇数则 $x_n \to 0(n\to\infty)$.

2.（1）必要条件；（2）一定发散；（3）不一定收敛，例如数列$\{(-1)^n\}$有界，但发散.

习　题 1-3

1.解(1) $\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

(2) $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

(3) $\lim_{x\to 0} f(x)$不存在，因为$f(0^+) \neq f(0^-)$

2.解（1）错，$\lim_{x\to 0} f(x)$存在与否，与$f(0)$的值无关

（2）对，因为$f(0^+) = f(0^-) = 0$

（3）错，$\lim_{x\to 0} f(x)$=0，其值与$f(0)$的值无关

（4）错，$f(1^+) = 0$，但　$f(1^-) = -1$，故$\lim_{x\to 1} f(x)$不存在

（5）对，因为　$f(1^+) \neq f(1^-)$

（6）对.

3. 解（1）对.

（2）对，因为当$x < -1$时，$f(x)$无定义

（3）对，因为$f(0^+) = f(0^-) = 0$

（4）错，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，其值与 $f(0)$ 的值无关

（5）对　（6）对　（7）对

（8）错，因为当 $x>2$ 时，$f(x)$ 无定义，$f(2^+)$ 不存在.

4.解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}1=1,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1, \lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-1=-1,$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\varphi(x), \therefore \varphi(x)$ 在 $x\to 0$ 时的极限不存在.

习　题 1-5

1.解（1）原式=$\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\dfrac{9}{-1}=-9$

（2）原式=$\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^2+1)}=\dfrac{0}{4}=0$

（3）原式=$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$

（4）原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(4x^2-2x+1)}{x(3x+2)}=\dfrac{1}{2}$

（5）原式=$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2x+h)\cdot h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x$

（6）原式=$\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=2-0+0=2$

（7）原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{2}$

（8)）原式=$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=0$

（9）原式=$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{2}{3}$

（10）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=2$

（11）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n}}\right)=2$

（12）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

（13）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)=\frac{1}{5}$

（14）原式$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1$

2.解（1）$\because\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x^3+2x^2}=0,\therefore\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}=\infty$.

（2）$\because\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=0,\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}=\infty$.

（3）$\because\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3-x+1}=0,\therefore\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)=\infty$

3.解（1）$\because\lim\limits_{x\to0}x^2=0,$ 而 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，即 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le1,\therefore\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

（2）$\because\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$ 而 $\arctan x$ 为有界函数 $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}=0$.

习　题 1-6

1.解（1）原式$=\lim\limits_{x\to0}\omega\cdot\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\omega x}{\omega x}=\omega\cdot1=\omega$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\cos3x}\cdot\frac{\sin3x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3}{\cos3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}=3\cdot1=3$

（3）原式$=\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin5x}=\frac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{5x}{\sin5x}=\frac{2}{5}$

（4）原式$=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$

（5）原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2$

（6）原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot x=\lim\limits_{n\to\infty}x\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}=x$

2.解（1）令$-x=\frac{1}{t}$，即$t=-\frac{1}{x}$.则$x\to 0$时，$t\to\infty$,

$\therefore$原式$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{e}$.

（2）令$t=\frac{1}{2x}$,即$x=\frac{1}{2t}$,则$x\to 0$时，$t\to\infty$,$\therefore$原式$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=e^2$

（3）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^2$

（4）令$t=-x$,即$x=-t$.则$x\to\infty$时，$t\to\infty$,

$\therefore$原式$=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-kt}=\left[\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}\right]^{k}=e^{-k}$

习　题 1-7

1.证明：$\because\lim\limits_{x\to 0}(2x-x^2)=0,\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x^3)=0$且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2-x^3)}{(2x-x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{2-x}=0$,

$\therefore x^2-x^3$为$2x-x^2$高阶的无穷小.

2.解：$\because\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^2=0,\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2}{x^2}=0$,

$\therefore$当$x\to 0$时,$(1-\cos x)^2$是比$\sin^2 x$高阶的无穷小.

3.解（1）$\because\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)=3$,$\therefore 1-x$与$1-x^3$同阶，不等价；

（2）$\because\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{2}(1-x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2}(1+x)=1$,$\therefore$无穷小$1-x$与$\frac{1}{2}(1-x^2)$同阶而且等价.

4.解（1）$\because\tan 3x\sim 3x(x\to 0)$,$\therefore$原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.

（2）$\because \sin x^n \sim x^n (x \to 0), \sin x \sim x(x \to 0),$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0, n > m, \\ 1, n = m, \\ \infty, n < m. \end{cases}$$

（3）原式$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}$

（4）由于 $\cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2, \tan x \sim x, \sqrt[3]{1+x^2}-1 \sim \frac{1}{3}x^2$ 及 $\sqrt{1+\sin x}-1 \sim \frac{1}{2}x,$

故原式$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)\cdot\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2\cdot x}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}x} = -3.$

习　题 1-8

1.解：（1）$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(2-x) = 1, \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1,$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1),$

$\therefore f(x)$在$x=1$点连续.

$\therefore f(x)$在$[0,2]$上连续.

图形如图 1-8 所示

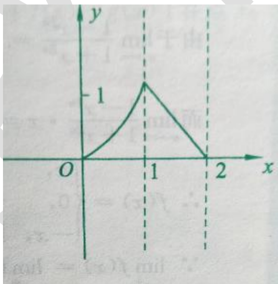


图 1-8

（2）$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1),$

$\therefore x = 1$ 点为连续点.

又$\because \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = -1 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1,$

$\therefore x=-1$为$f(x)$间断点,即$f(x)$在$x=-1$点不连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内连续.

图形如图 1-9 所示

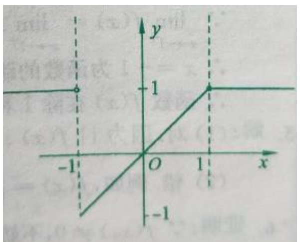


图 1-9

2.解：（1）$y = f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)},$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2} = -2, \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-2} = \infty.$

$\therefore x=1$为可去间断点，属第一类间断点；$x=2$为无穷间断点，属第二类间断点.

可令 $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq 1\\ -2, & x=1\end{cases}$ 则 y在$x=1$点连续.

（2）$\because \lim\limits_{x\to k\pi}\dfrac{x}{\tan x}=\infty(k\neq 0)$,当$k=0$时,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$, $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{\tan x}=0$.

$\therefore x=k\pi(k=\pm 1,\pm 2...)$为无穷间断点，属第二类间断点；

$x=0$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2...)$为可去间断点，属第一类间断点.

可补充定义 $y=\begin{cases}\dfrac{x}{\tan x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}且x\neq 0\\ 0, \quad x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ 1, \quad x=0\end{cases}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2...)$，则此时

y在$x=0$和$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2...)$点连续.

（3）$\because$ 当$x\to 0$时，函数值在 0 与 1 之间变动无限多次，所以点 $x=0$ 为函数 $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点，属第二类间断点.

（4）$\because \lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2, \lim\limits_{x\to 1^-}y=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$

$\therefore x=1$为函数的跳跃间断点，属第一类间断点.

习 题 1-9

1.解（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2-2x+5}\Big|_{x=0}=\sqrt{5}$

（2）$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3=(\sin 2\alpha)^3\Big|_{\alpha=\frac{\pi}{4}}=1$

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)=\ln(2\cos 2x)\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=0$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$

（5）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{5x-4}-\sqrt{x})(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}{(x-1)\cdot(\sqrt{5x-4}+\sqrt{x})}=2$

（6）$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{2\cdot\cos\dfrac{x+\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha}=\cos\alpha$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{2}{1+1}=1$

（8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\cdot\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{3}$

2.解：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\right)=\ln1=0$

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

（4）$\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\tan^2x\right)^{\cot^2x}\underline{\underline{令t=\tan^2x}}\lim\limits_{t\to0^+}(1+3t)^{\frac{1}{t}}\underline{\underline{令u=\frac{1}{3t}}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{3u}$

$=\left[\lim\limits_{u\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u\right]^3=e^3$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{6+x}\right)^{-\frac{x+6}{3}\cdot\left[\frac{3(x-1)}{2(x+6)}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{3(x-1)}{2(x+6)}\cdot\ln\left(1-\frac{3}{6+x}\right)^{-\frac{x+6}{3}}\right]}=e^{-\frac{3}{2}}$

（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2x}-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x\sqrt{1+\sin^2x}+x\right)(\tan x-\sin x)}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)\cdot x^2\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+\sin^2x}+1\right)(\sec x-1)}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)\cdot x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{1}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}\underline{\underline{令s=x-e}}\lim\limits_{s\to0}\dfrac{\ln(e+s)-\ln e}{s}=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{\ln\left(1+\frac{s}{e}\right)}{s}=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{\frac{s}{e}}{s}=\dfrac{1}{e}$

（8）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot x}{-\frac{1}{3}\cdot x^2}=-6$

3.解：$\because\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a,\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1$，

要使 $f(x)$ 成为 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，则应满足：

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$，即$a=1=a+0,\therefore a=1$

$\therefore$ 当$a=1$时，$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$内的连续函数.

总 习 题一

1.解：（1）必要，充分；（2）充分必要.

2.解：$a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-x^2}=1$

3.解：（1）因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+3^x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 2+\ln 3=\ln 6\neq 1$，

所以当$x\to 0$时，$f(x)$与x同阶但是非等价无穷小，应选 B.

（2）$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1, f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

因$f(0^-)$、$f(0^+)$均存在，但$f(0^-)\neq f(0^+)$，所以$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，选B.

4.解：（1）$\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x+1}=0,\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}=\infty$

（2）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$

（3）令$t=\dfrac{2x+1}{2}$，则$x=\dfrac{2t-1}{2}$. $\therefore$ 当$x\to\infty$时，$t\to\infty$.

$$\therefore 原式=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{2t+1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\cdot\frac{2t+1}{2t}}=e^{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t+1}{2t}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=e$$

（4）$\because \sin x\sim x(x\to 0),\sec-1\sim\dfrac{x^2}{2}(x\to 0)$

$$\therefore \tan x-\sin x=\sin x(\sec x-1)\sim\frac{x^3}{2}(x\to 0),\therefore 原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2}/x^3=\frac{1}{2}$$

（5）$$原式=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)};$$

$$=e^{\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{\ln a\cdot x}-1}{x}+\frac{e^{\ln b\cdot x}-1}{x}+\frac{e^{\ln c\cdot x}-1}{x}\right)}=e^{\frac{1}{3}\ln(abc)}=\sqrt[3]{abc}$$

（6）原式$\underline{\underline{令t=x-\dfrac{\pi}{2}}}\lim\limits_{t\to 0}(\cos t)^{-\frac{\cos t}{\sin t}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+\cos t-1)^{\frac{1}{\cos t-1}\cdot\frac{\cos t-1}{-\sin t}\cos t}=e^0=1$

（7）令$t=x-a$，则$x=a+t$，当$x\to a$时，有$t\to 0$，故

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{a}\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{a}}{t}=\frac{1}{a}.$$

（8）$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{-\frac{1}{2}x^2}=-2$

5.解：$\because f(x)$在$(0,+\infty),(-\infty,0)$内连续，$\therefore$ 只需讨论 $f(x)$在$x=0$ 点的连续性即可.

$$\because \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+x^2)=a,$$

要使 $f(x)$在$x=0$ 点连续，应满足：$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$，

即 $0=a=a+0,\therefore a=0$.

$\therefore$ 当$a=0$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续.

6.证明：$\because \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<1,$

而且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，

$\therefore$ 由夹逼准则，知：$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.